MATEMÁTICAS 4

Precálculo: funciones y aplicaciones

BACHILLERATO GENERAL

SERIE INTEGRAL POR COMPETENCIAS

Joaquín Ruiz Basto

primera edición ebook 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede utilizar estos medios:

correo:

Renacimiento 180,
Col. San Juan Tlihuaca,
Azcapotzalco, 02400,
México, D.F.

e-Mail:

info@editorialpatria.com.mx

Fax pedidos:

(0155) 5354 9109 • 5354 9102

sitio web:

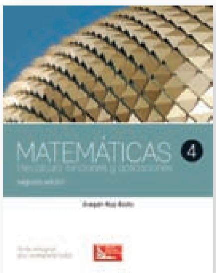
www.editorialpatria.com.mx

teléfono:

(0155) 53 54 91 00

Grupo Editorial Patria®
División Bachillerato, Universitario y Profesional

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinación editorial: Alma Sámano Castillo
Elaboración de rúbricas: Alex Polo Velázquez, páginas: 22, 23, 24, 50, 51, 72, 73, 108, 109, 130, 131, 162, 163, 178, 179
Diseño de interiores y portada: Juan Bernardo Rosado Solís
Supervisor de preprensa: Miguel Ángel Morales Verdugo
Diagramación e ilustraciones: Gustavo Vargas Martínez, Jorge Antonio Martínez Jiménez
Fotografías: Thinkstock



Matemáticas 4.
Precálculo: funciones y aplicaciones

Serie integral por competencias

ISBN ebook: 978-607-744-001-7

Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

Impreso en México / Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Dedicatoria

A Estela, Rodrigo, Leonardo, Christian y Ricardo.

A todos los que contribuyeron para la realización de esta obra.

Contenido

Competencias genéricas del Bachillerato General

Las competencias genéricas son aquellas que todos los bachilleres deben estar en la capacidad de desempeñar, y les permitirán a los estudiantes comprender su entorno (local, regional, nacional o internacional) e influir en él, contar con herramientas básicas para continuar aprendiendo a lo largo de la vida, y practicar una convivencia adecuada en sus ámbitos sociales, profesional, familiar, etc., por lo anterior estas competencias construyen el Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato.

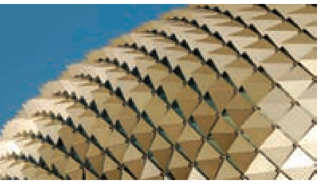
A continuación se enlistan las competencias genéricas:

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la inculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Competencias disciplinares básicas del campo de las Matemáticas

Competencias disciplinarias básicas	Bloques de aprendizaje							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	X	X	X	X	X	X	X	X
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	X	X	X	X			X	X
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	X	X	X	X		X	X	X
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.			X	X	X	X	X	X
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	X	X	X	X	X	X	X	X
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	X		X				X	X
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.			X				X	
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	X	X	X	X	X		X	X

Presentación



MATEMÁTICAS 4

Precálculo: funciones y aplicaciones

Es el cuarto libro de la *Serie integral por competencias*, que ayudará a profesores y estudiantes a organizar y desarrollar experiencias de aprendizaje a lo largo del cuarto semestre escolar del bachillerato general.

Esta obra se apega al programa oficial de la asignatura y pone el centro de la actividad en el propio estudiante.

Así, cada uno de los 8 bloques que lo integran inicia exponiendo una situación práctica al estudiante, de su entorno social, familiar o personal, que requiere la búsqueda de explicaciones o soluciones.

La obra propone, enseguida, una secuencia didáctica de actividades que conduce al alumno a la solución de la situación propuesta y que puede realizarse individualmente o en forma colectiva de modo que, a través del análisis, la reflexión, el estudio, la investigación y el trabajo personal y colaborativo, el estudiante desarrolle habilidades cognitivas, haciendo y aplicando sus conocimientos, mismos que podrá ampliar en los segmentos informativos de cada lección; incluyen ejercicios de autoevaluación con solución para los impares.

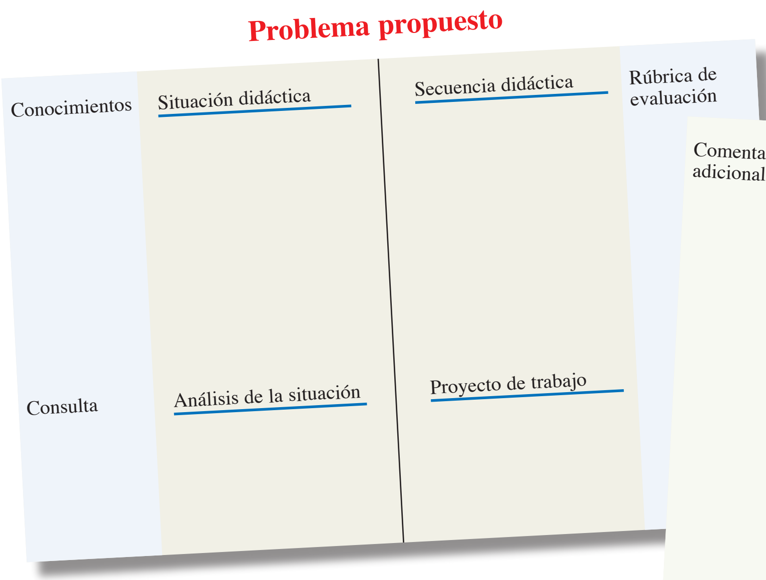
Cada bloque contiene, después de cada situación didáctica, un proyecto de trabajo cuyo objetivo es que el estudiante desarrolle sus conocimientos y habilidades, y consolide la autonomía en su quehacer.

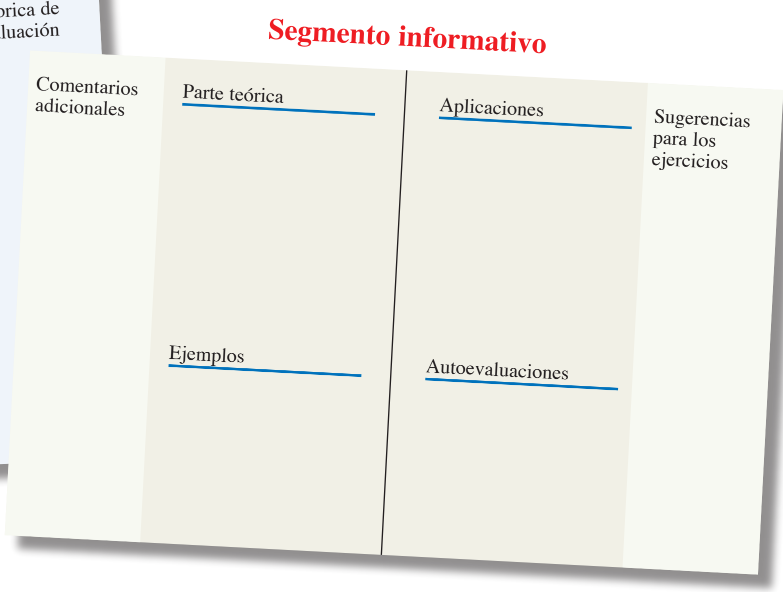
La obra contiene un Apéndice, en forma de preguntas y respuestas, para ayudar al estudiante a ampliar o profundizar algunos de los conocimientos estudiados.

La distribución de los contenidos del curso en 8 bloques permitirá al profesor disponer de variados problemas de aplicación práctica para organizar su trabajo en el aula.

Esta segunda edición se enriquece con nuevos e interesantes problemas y con modelos de instrumentos para la evaluación: rúbricas analíticas, listas de cotejo, guías de observación y lineamientos para la organización y uso de un portafolio de evidencias, elementos que, sin duda, serán de gran utilidad para el alumno y el profesor.

Joaquín Ruiz Basto





Reconoces y realizas operaciones con distintos tipos de funciones

Competencias a desarrollar

- Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

BLOQUE 1

Objetos de aprendizaje

- Funciones
- Relaciones
- Dominio
- Contradominio
- Imagen
- Regla de correspondencia

Desempeños del estudiante al concluir el bloque

Utiliza los criterios que definen a una función para establecer si una relación dada es funcional o no.

Describe una función empleando diferentes tipos de registros y refiere su dominio y rango.

Emplea la regla de correspondencia de una función y los valores del dominio implícito o explicito, para obtener las imágenes correspondientes.

Aplica diferentes tipos de funciones en el análisis de situaciones.

Utiliza operaciones entre funciones para simplificar procesos a través de nuevas relaciones.

Aplica las nociones de relación y función para describir situaciones de su entorno.

¿Qué sabes hacer ahora?

La tabla muestra el crecimiento anual de un árbol de durazno que tiene 61 cm de alto y crece a razón de 35 cm cada año.

Tiempo x (años)	0	1	2	3
Altura y (cm)	61	96	131	166

La expresión algebraica $y = 61 + 35x$ describe esta misma relación, en tanto que $y = 106 + 42x$ describe el crecimiento de un ciruelo de 106 cm de alto que crece a razón de 42 cm por año.

Estas relaciones ilustran el importante concepto matemático de función: una variable (la altura en este caso) depende de otra (el tiempo) y toma valores únicos (la planta no tiene dos alturas en un mismo momento).

Las anteriores expresiones son útiles para determinar, por ejemplo, cuándo ambos árboles tendrán la misma altura y cuál será ésta.

BLOQUE 1

A

Conocimientos

Relaciones

Una relación es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Expresa una *dependencia* entre dos cantidades o variables y puede indicarse mediante enunciados, tablas, gráficas, diagramas, ecuaciones o parejas ordenadas.

Funciones

Toda relación donde a cada elemento le corresponde *sólo otro* elemento.

Ejemplos

1. A una persona se le asocia cada uno de sus *dos* progenitores (no es función).
2. El área de un círculo depende de su radio: $A = \pi r^2$ (es función).
3. A cada número se le asocia su cuadrado: $y = x^2$ (es función).
4. A cada cuerpo geométrico se le asocia cada una de sus *tres* dimesiones (no es función).

Dominio y rango

En una ecuación el dominio son los valores que toma la variable independiente y el rango los de la variable dependiente.

En parejas ordenadas los primeros elementos forman el dominio y los segundos elementos forman el rango.

Consulta

En libros de álgebra intermedia:

- *Relaciones y funciones*
- *Dominio y rango de una función*

Situación didáctica — Llamadas de larga distancia

Requieres efectuar una llamada de larga distancia a tu casa situada a 325 km del sitio donde te hallas. El primer minuto cuesta \$6.25 y cada minuto adicional, \$5.00.

- ¿Con cuál expresión algebraica determinarías el costo de tu llamada para cualquier número entero de minutos?
- Valúa esta expresión para saber cuánto pagarías por llamadas que duren 6, 10 y 12 minutos.
- ¿Para cuántos minutos de llamada te alcanzan \$72.60?
- ¿Cuál sería el monto de tal llamada, considerando que sólo puedes calcular con este modelo costos para un número entero de minutos? ¿Te sobraría alguno de los \$72.60?

Análisis de la situación

1. **Explora** Elabora una tabla con los pagos que tendrías que efectuar hasta 10 minutos, de acuerdo con la tarifa telefónica.

Tiempo (t)	1	2	3	4	5
Costo $C(t)$	6.25	6.25 + 5	6.25 + 2(5)	6.25 +	

2. **Analiza** ¿Notas alguna relación entre el tiempo y el costo en las columnas sucesivas de la tabla? ¿Aplica en todas ellas?

Secuencia didáctica

1. Para efectos de pago, el tiempo de una llamada se descompone como sigue:

Tiempo de la llamada	*Primer minuto*	*Minutos adicionales*
5	1	5 – ________ = ________
6	1	____ – ________ = ________
10	1	____ – ________ = ________
t	1	____ – ________

2. La tabla elaborada en el análisis de la situación muestra que el factor del costo de \$4.00, lo constituye ____________ (el primer minuto, los minutos adicionales). Por tanto, el modelo es:

$$\textit{Costo de la llamada} = \textit{Costo 1er. minuto} + 5 \times \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$C(t) = 6.25 + 5(\_\_\_\_ - \_\_\_\_)$$

3. Para calcular el costo por llamadas de 6, 10 y 12 minutos de duración, se reemplaza cada valor por t en la ecuación anterior:

$$C(5) = 6.25 + 5(6 \quad - \quad) = \$\ \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$C(10) = 6.25 + 5(\quad - \quad) = \$\ \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$C(12) = 6.25 + 5(\quad - \quad) = \$\ \_\_\_\_\_\_\_\_$$

4. Suponiendo que \$72.60 fuera el costo de la llamada, en el modelo para el costo debes reemplazar este valor por ________ ($C(t)$; t) y despejar t. Como t debe ser entero, consideras el entero ______________ (anterior, siguiente) a este valor, $t =$ __________ .

5. Al sustituir este valor en el modelo anterior obtienes que el costo de esa llamada será de \$ __________ . Así, de la cantidad máxima que tenías dispuesta te quedarán \$ __________ .

Proyecto de trabajo

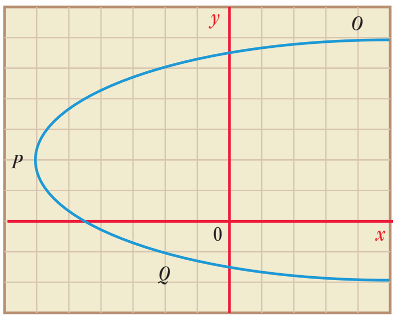
1. ¿Cuáles relaciones corresponden a una función?

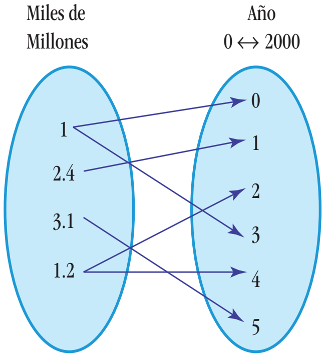
a) La relación que asocia a cada miembro de una familia con su peso promedio en una semana determinada.

b) La lista de artículos adquiridos en un almacén.

c) El déficit fiscal asociado con cada año en el diagrama.

2. ¿Representa una función esta gráfica?





Rúbrica de evaluación

Elabora un resumen en tu cuaderno en el cual incluyas lo siguiente:

1. La tabla elaborada hasta 10 minutos en el análisis de la situación junto con una descripción verbal de la regularidad observada en las columnas.

2. Las repuestas a las preguntas de la secuencia didáctica, comprobando el modelo para llamadas de 1, 2, 3, 4 y 5 minutos, con un comentario acerca de su funcionamiento para el caso de 1 minuto.

3. Una reflexión acerca de cómo utilizar el modelo cuando debes hallar el tiempo para montos determinados de dinero y por qué este modelo no funciona para números no enteros de minutos.

Cebolla	\$12	kg
Jitomate	\$16	kg
Café soluble	\$40	frasco
Crema	\$25	litro
Leche	\$12	litro
Servilletas	\$12	paquete
Jabón	\$6	pieza
Pasta dental	\$40	pieza

Segmento informativo **1A**

Fíjate en lo siguiente...

1. Una pareja ordenada cambia al invertir el orden de los elementos: (3, 4) ≠ (4, 3).
2. En toda relación el orden es importante. *Ejemplo:* en la lista que relaciona los precios de artículos y el impuesto a pagar:

Precio	45	67	83	91
IVA	6.75	10.05	12.45	13.65

es importante que consideres que no puedes intercambiar valores Precio-IVA. En esta relación la pareja (45, 6.75) no expresa lo mismo que (6.75, 45).

Recuerda

La notación { } indica "conjunto". Dentro se listan los objetos o elementos, o bien, se escribe la propiedad que caracteriza a los elementos del conjunto.

Observaciones importantes

1. La gráfica de la ecuación

$$y = 2x$$

sólo son ***cuatro puntos aislados*** cuando el dominio es {1, 2, 3, 4} y ***una línea recta*** cuando el dominio son todos los números reales.

2. Por esto, si una función se describe con una ecuación, ***debe indicarse su dominio***.

(Cuando no se hace, se sobreentiende que ***son todos los números reales para los cuales la ecuación tiene sentido***.

Ejemplo: el dominio de la función $y = \frac{3}{x}$ son todos los reales excepto el 0, pues $\frac{3}{0}$ no está definido.)

Relaciones y funciones

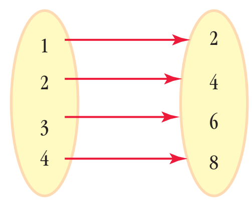
Una ***relación*** es un conjunto de parejas ordenadas (*x*, *y*). Los valores ***x*** forman el **dominio** y los valores ***y*** el **rango** de la relación.

Existen muchas formas de describir una relación: como parejas ordenadas, mediante una oración verbal, o por medio de una ecuación, una tabla, una gráfica o un diagrama.

Oración

A cada número entero del 1 al 4 se le asocia su doble.

Diagrama



Tabla

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

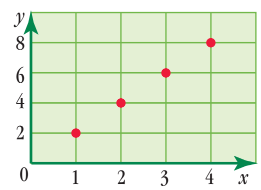
Parejas ordenadas

{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)}

Ecuación

$$y = 2x$$

Gráfica

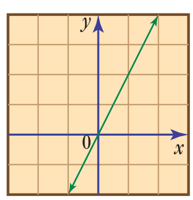


En esta relación, el *dominio* es el conjunto {**1, 2, 3, 4**} y el *rango* es el conjunto {**2, 4, 6, 8**}.

Una ***función*** es una relación donde a cada valor *x* le corresponde ***un solo valor y***.

La gráfica permite identificar fácilmente una función. Observa:

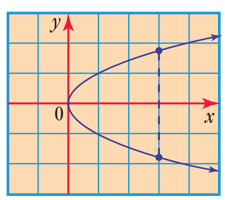
Función



A cada *x* le corresponde un único valor *y*.

$$y = 2x$$

No función



Existen diversas *x* a las que les corresponden dos valores *y*.

$$y = \pm\sqrt{x}$$

Ejemplo 1 Identificando funciones

¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones? Halla el dominio y el rango.

a) $\{(0, 2), (1, 3), (0, 4), (3, 5)\}$

b) $\{(-1, 2), (-2, 3), (-4, 5), (-5, 5)\}$

c) $\{(-1, 8), (0, 8), (1, 8)\}$

Solución

a) No es función, ya que al número cero se le asocian dos valores y:

$0 \to 2$; $0 \to 4$.

Dominio $= \{0, 1, 3\}$; rango $= \{2, 3, 4, 5\}$.

b) Sí es función. A cada valor x se le asocia un solo valor y.

Dominio $= \{-1, -2, -4, -5\}$; rango $= \{2, 3, 5\}$.

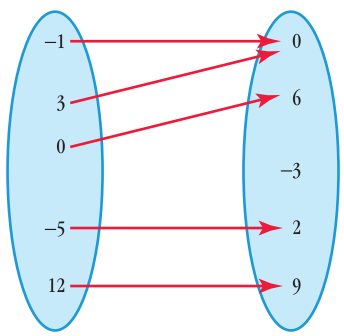
c) Sí es función. Ninguna x tiene asociados dos o más valores y.

Dominio $= \{-1, 0, 1\}$; rango $= \{8\}$.

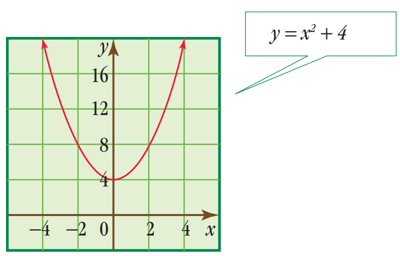
Ejemplo 2 Determinando el dominio de una función

Obtén el dominio y el rango de cada una de las funciones siguientes.

a)



b)



Solución

a) Dominio $= \{-1, 3, 0, -5, 12\}$; rango $= \{0, 6, 2, 9\}$.

b) Para todo número real x existe x^2 (su cuadrado). Por tanto, x admite cualquier valor real: *Dominio* = {Números reales}. Para hallar el rango debemos determinar qué valores admite y en la ecuación $y = x^2 + 4$. Para ello, despejamos x: $x = \pm\sqrt{y-4}$. Esta raíz existe sólo si la cantidad dentro del radical no es negativa: $y - 4 \geq 0$. Resolviendo la desigualdad obtenemos $y \geq 4$. El rango es el conjunto de valores de y mayores o iguales a 4.

Ejemplo 1

Fíjate en lo siguiente…

1. Incisos **b** y **c**. En una función es posible que un mismo valor y se asigne a diferentes valores x. Lo que no es posible es que a una misma x se le asignen diferentes valores y.
2. Cuando el mismo valor y se asigna a todas las x (como en el inciso **c)**), la función se denomina **constante**.
3. Si en cada pareja el valor de x es igual al de y, la función se llama **idéntica**.

Ejemplo: $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

Fíjate en lo siguiente…

1. Si una función está descrita con una ecuación, como $y = 3x + 1$, puede dársele un nombre, digamos f, y utilizar la ***notación funcional*** $f(x) = 3x + 1$ para referirse a ella.
2. En la notación funcional se tiene $y = f(x)$ ("y igual a f de x"), es decir: $(x, y) = (x, f(x))$. Se dice que ***f(x) es la imagen de x***. También se dice que $f(x)$ es el valor de la función en x.

Ejemplo: el valor de la función $f(x) = 3x + 1$ en 5 es $f(5) = 3(5) + 1 = 16$; el valor de la función f en -1 es $f(-1) = 3(-1) + 1 = -2$; la imagen de 4 bajo la función f es $f(4) = 3(4) + 1 = 13$.

Ejemplo 2

Observaciones importantes

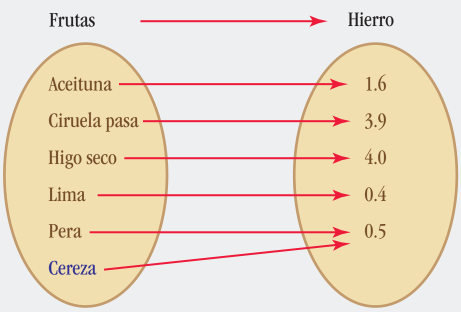
Cuando una función $f(x) = 3x + 1$ se da mediante una ecuación y no se indica el ***dominio***, puede obtenerse éste despejando y. Si quedan **denominadores o raíces** se excluyen del dominio aquellos valores de x que hacen cero el denominador, o bien que producen números negativos dentro de un radical de orden par: $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$, … En forma análoga, despejando x podemos determinar el ***rango***.

Ejemplo 3

Fíjate en lo siguiente...

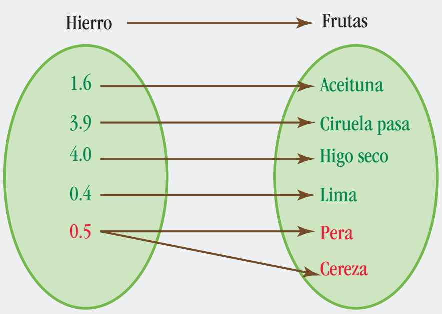
1. En una función puedes asociar diversos elementos del dominio —incluso todos— con la misma imagen.

Función



2. Lo que no puede hacerse en una función es asociar un elemento del dominio con dos o más imágenes.

No-función



Prueba de la vertical

Cualquier línea vertical corta en un solo punto la gráfica de una función.

Sugerencias para la autoevaluación 1A

1. a 4. ¿Cuántas imágenes tiene cada elemento del dominio?

5. a 7. Sustituye la variable por el valor proporcionado y evalúa la expresión.

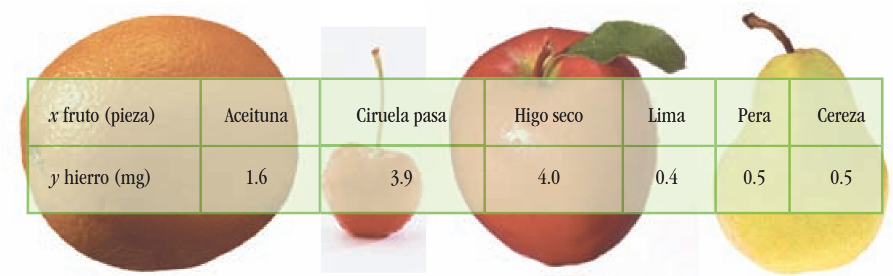
Para el ejercicio 7 recuerda lo siguiente:

a) $1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{1(3)+2}{3}=\dfrac{5}{3}$

b) $1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1(3)-2}{3}=\dfrac{1}{2}$

Ejemplo 3 Relaciones y funciones en la vida real

La cantidad de hierro contenida en un fruto depende del tipo de fruto seleccionado. Así, una fresa contiene 1 mg de este mineral, en tanto que una aceituna contiene 1.6 mg.



x fruto (pieza)	Aceituna	Ciruela pasa	Higo seco	Lima	Pera	Cereza
y hierro (mg)	1.6	3.9	4.0	0.4	0.5	0.5

La relación (x, y) = (fruto, cantidad de hierro) *es una función*. En cambio, la relación inversa (y, x) = (cantidad de hierro, fruto) *no es una función*, ya que en este caso a una misma cantidad de hierro, por ejemplo, 0.5 mg, le corresponde más de un fruto.

Autoevaluación 1A

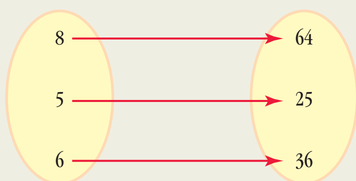
En los ejercicios **1** a **4** identifica cuáles relaciones son funciones y cuáles no. Obtén en cada caso el dominio y el rango.

1.

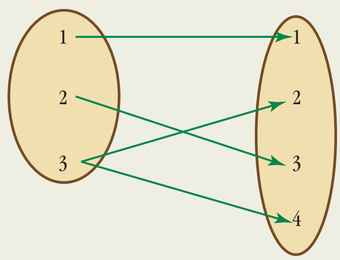
x	4	7	4	9
y	1	2	1	2

2. $\{(5, 6), (0, 8), (-3, 10), (0, 2), (-3, -1), (0, 0)\}$

3.



4.



En los ejercicios **5** a **7** encuentra el valor de la función en el punto dado.

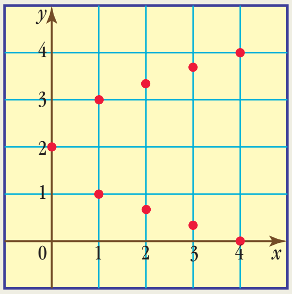
5. $f(x) = x^2 + 2x - 1;\ f(3)$

6. $g(x) = (x - 2)^3 + 5;\ g(2.5)$

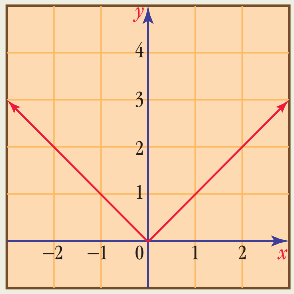
7. $h(x) = -x + 1/x;\ h(-2)$

En los ejercicios **8** a **11** determina cuáles gráficas corresponden a una función.

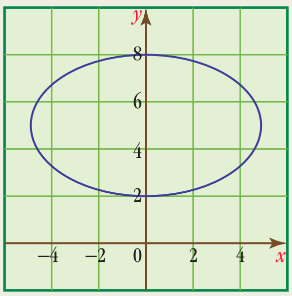
8.



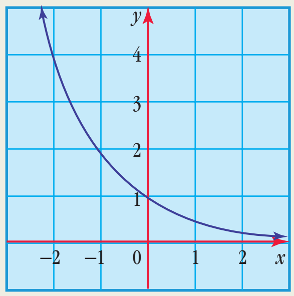
9.



10.



11.



En los ejercicios **12** a **14** obtén el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

12. $y = 3x + 5$

13. $y = 4x^2 - 1$

14. $f(x) = \dfrac{-2}{3 - x}$

15. Geometría El volumen V de una esfera depende de su radio r. Esta relación está dada por la ecuación: $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

a) ¿Es el volumen una función del radio?

b) Calcula $V(2)$. ¿Qué representa este valor?

c) ¿Es posible que el dominio contenga números reales negativos?

d) ¿Cuál es el volumen de un balón de basquetbol cuyo diámetro es de 29 cm?

c) $-1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{(-1)(3) + 2}{3} = \dfrac{-1}{3}$

d) $-1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{(-1)(3) - 2}{3} = \dfrac{-5}{3}$

El procedimiento es el mismo aun cuando la fracción esté primero y el entero después.

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{2 + 1(3)}{3} = \frac{5}{3}$$

En las restas es muy importante preservar el orden de *izquierda a derecha:*

a) $\dfrac{2}{3} - 1 = \dfrac{2 - 1(3)}{3} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}$

b) $-\dfrac{2}{3} - 1 = \dfrac{-2}{3} - 1$

$$= \frac{-2 - 1(3)}{3}$$

$$= \frac{-5}{3}$$

$$= -\frac{5}{3}$$

8. a 11. Aplica la prueba de la vertical.

14. Cambia $f(x)$ por y. Para analizar el dominio despeja y; para el rango despeja x en $y\,(3 - x) = -2$.

Ejemplo:

$g(x) = \dfrac{5}{x+1}$	Expresión dada
$y = \dfrac{5}{x+1}$	Cambias $g(x)$ por y
$y(x + 1) = 5$	Multiplicas por $(x + 1)$
$x + 1 = \dfrac{5}{y}$	Divides entre y
$x = \dfrac{5}{y} - 1$	Sumas −1
$x = \dfrac{5 - y}{y}$	Fracción simplificada

15a. ¿Cambia el volumen al variar el radio?

15c. El dominio está constituido por todos los valores del radio.

15d. El radio es la mitad del diámetro:

$$r = \frac{29}{2} = 14.5$$

BLOQUE 1 B

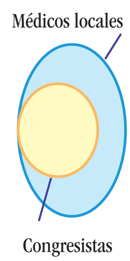
Situación didáctica Congreso médico

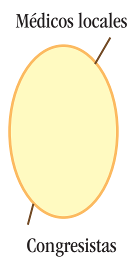
Una compañía de productos farmacéuticos toma el listado de médicos locales asistentes a un congreso y después localiza sus nombres en el directorio médico telefónico con el objeto de contactarlos.

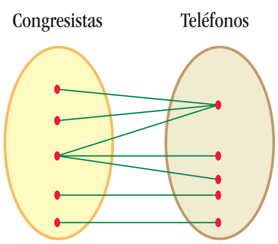
- Describe las posibles relaciones que podrían presentarse entre la cantidad de médicos asistentes y de médicos locales, y de médicos asistentes con los números telefónicos del directorio.
- Distingue entre estas relaciones cuáles pueden ser consideradas funciones.
- ¿Cuáles funciones pueden considerarse uno-uno, sobre o biunívocas? ¿Cuál sería la importancia práctica de tal clasificación?

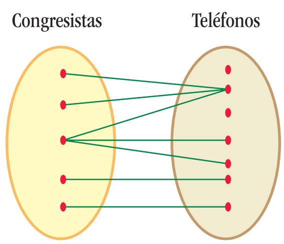
Análisis de la situación

1. Aunque todos los médicos de la localidad están registrados en el directorio médico telefónico, ¿asistirían todos al congreso? ¿Habría médicos con más de un número telefónico?
2. Identifica algunas posibilidades mediante diagramas.







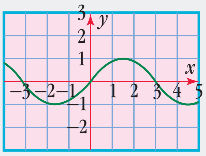


Conocimientos

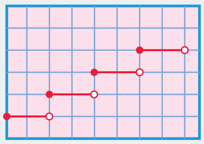
Clasificación de funciones

Las tres clasificaciones básicas se fijan en si sus gráficas son continuas o discontinuas, o si su regla de correspondencia es una ecuación algebraica o trascendente; o bien, en la cantidad de elementos que se asocian.

Continua

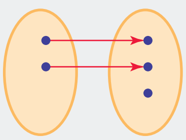


Discontinua



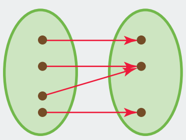
Algebraicas	***Trascendentes***
$y = 3x^2 - 2$	$y = \text{sen } x$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y = e^{3x}$
$y = \sqrt{x+1}$	$y = 2 \log x + 1$

Uno a uno



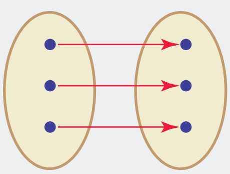
Elementos distintos tienen imágenes distintas.

Sobre



Ningún elemento queda sin asociar en el segundo conjunto.

Biunívoca



Uno a uno y sobre.

Consulta

En libros de álgebra intermedia:

- *Clasificación de funciones*

Secuencia didáctica

1. Todos los médicos locales pudieron haber asistido al congreso, o bien, sólo una parte de ellos. El primer diagrama en el Análisis de la situación ilustra el caso en que ____________________________ y el segundo diagrama el caso en el que ____________________________ .

2. El tercer diagrama muestra, en cuanto a los médicos congresistas, que:

   a) varios de ellos podrían tener un ______________________. En la vida real esto ocurre cuando los médicos ____ ,

   b) o que un mismo médico puede tener más de un teléfono,

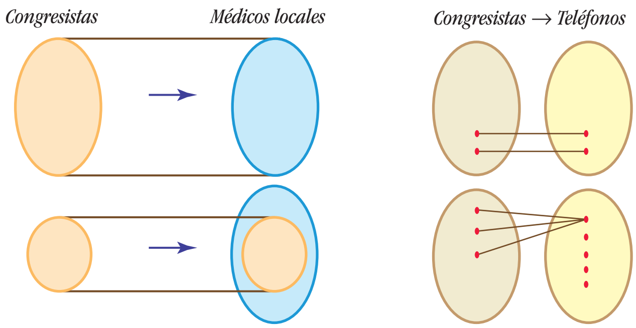
   c) o que otros podrían tener ____________________ (sólo un, ningún) teléfono.

3. De estas tres posibilidades, el caso *b*) no sería una función porque ____________ ____.

   La relación del caso *a*) es una función _________________ (constante, idéntica).

   El caso *c*) ¿indica una función *uno-uno* o, incluso, *biunívoca*? _____________ (sí, no). ¿Por qué? ____ .

4. Identifica los diagramas que ilustran casos de funciones *sobre*.



5. Utilidad práctica: determinar si todos los médicos locales ____________________ (se actualizan, no se actualizan) y si disponen de números telefónicos _________ _____________ (únicos, compartidos) para su localización.

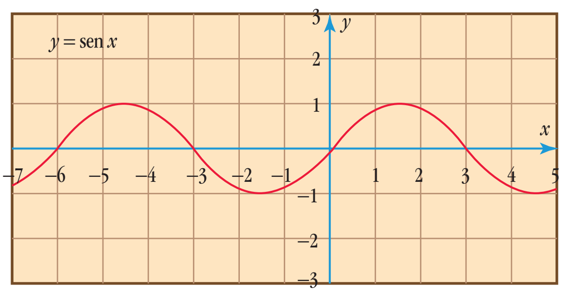
Proyecto de trabajo

Identificando funciones ¿Son *uno a uno* las siguientes funciones?

1. La función que en un país asigna a cada persona su nacionalidad.

2. La función $y = x^2$.

3. La función $y = \text{sen}\ x$.



Rúbrica de evaluación

1. Haz un resumen en tu cuaderno de matemáticas con las tres clasificaciones básicas de funciones, explicando con tus palabras cuál es la característica de cada una de ellas.

2. Escribe una descripción de las funciones uno a uno, sobre y biunívocas, empleando los siguientes términos: imagen, rango, codominio y dominio.

3. En la evaluación sumativa utiliza la prueba geométrica para averiguar si la función es uno a uno. Explica en qué difiere de la prueba geométrica para identificar funciones. Escribe un resumen sobre estos criterios.

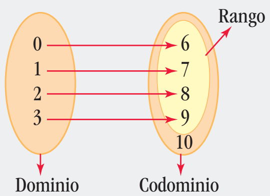
Segmento informativo **1B**

Fíjate en lo siguiente...

1. En las funciones continuas la gráfica no presenta puntos aislados, saltos o interrupciones.
2. En las funciones algebraicas los valores se obtienen mediante un número finito de operaciones algebraicas (en las trascendentes estas operaciones sólo posibilitan aproximar sus valores).

Observaciones importantes

1. Al conjunto que contiene al rango se le llama ***codominio***.



2. Sólo los elementos ***que son imágenes del dominio*** están en el rango. Al rango también se le llama *recorrido*, *imagen*, *ámbito* o *contradominio*.
3. La notación $f: A \to B$ (se lee: "f de A en B") indica que la función f va del conjunto A (**dominio**) al conjunto B (**codominio**). El rango está contenido en B.

Fíjate en lo siguiente...

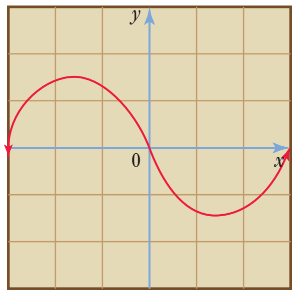
1. ***Función uno a uno***: cada elemento del dominio tiene su propia imagen. A estas funciones también se les llama *inyectivas* o *unívocas*.
2. ***Función sobre***: todo el codominio es imagen (es decir, todo elemento del codominio está asociado con alguno del dominio). A estas funciones también se les llama *suprayectivas*.
3. ***Función biunívoca***: es simultáneamente uno a uno y sobre. A estas funciones también se les llama *biyectivas*.

Clasificación de funciones

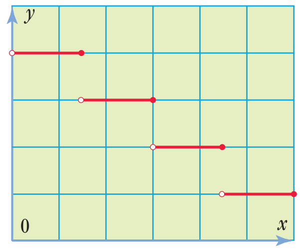
Existen diversos criterios para clasificar las funciones. Algunos de los más usuales están referidos a su gráfica, al tipo de operaciones que admiten y a su rango y dominio.

Por sus gráficas

Continuas



Discontinuas

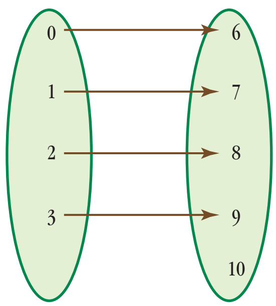


Por las operaciones para obtener sus valores

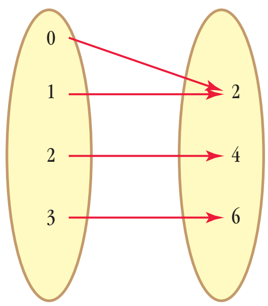
Algebraicas		*Trascendentes*	
$y = 3x^2 + x - 5$	***Polinomiales***	$y = 7(5)^x$	***Exponenciales***
$y = \dfrac{-2}{x+1}$	***Racionales***	$y = -\log_4 x$	***Logarítmicas***
$y = \sqrt{x+6}$	***Ni polinomial ni racional***	$y = \operatorname{sen} x$	***Trigonométricas***

Por la asociación entre dominio y rango

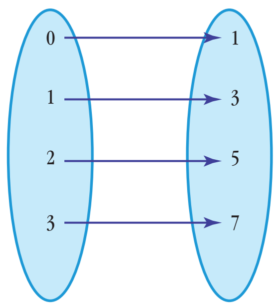
Uno a uno



Sobre



Biunívocas



Ejemplo 1 Funciones continuas y discontinuas

A partir de una ecuación, su dominio y su gráfica, determina cuáles de las siguientes funciones son continuas o discontinuas.

a) $h(x) = \{(2, 1), (3, 1.5), (4, 2), (5, 2.5), (6, 3)\}$

b) $g(x) = x - 2$

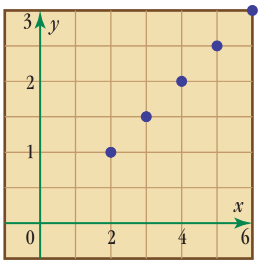
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

Solución

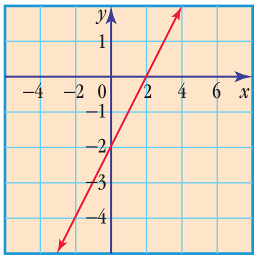
a) Como el dominio de h consta sólo de cinco elementos $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, la gráfica de h contiene cinco puntos aislados. La función es discontinua.

b) Todas las funciones polinomiales son continuas.

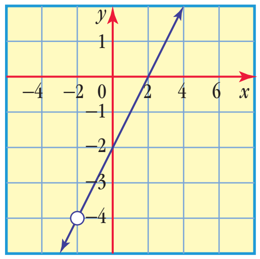
c) Las funciones racionales son discontinuas para todos los valores de x que hacen cero el denominador. En este caso, el denominador es cero cuando $x = -2$.



Inciso a)



Inciso b)



Inciso c)

Ejemplo 2 Identificando funciones algebraicas y trascendentes

Clasifica cada función como algebraica o trascendente e indica el tipo al que corresponde.

a) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{2}$ **c)** $y = -\text{ang cos } x^2$

d) $y = 3 \log_5 (x - 1)$ **e)** $y = 1\,500\,(0.032)^{2x}$

Solución

a) Algebraica. **Racional.**

b) Algebraica. **Polinomial.**

c) Trascendente. **Trigonométrica.**

d) Trascendente. **Logarítmica.**

e) Trascendente. **Exponencial.**

Ejemplo 3 Funciones en la vida real

a) Los botones y ojales de una prenda de vestir se relacionan de modo que, en la forma ordinaria del uso de la prenda, a cada botón le corresponde sólo un ojal. De aquí que esta relación sea una *función*. Esta función es *uno a uno* debido a que dos botones distintos no pueden ir en un mismo ojal (es decir, a botones distintos les corresponden ojales distintos). Es *sobre* porque no quedan ojales vacíos. Esta función es *biunívoca* porque es uno-uno y sobre, es decir, para cada botón hay un solo ojal y ambos conjuntos quedan asociados sin que sobren elementos en ninguno de ellos.

Ejemplo 1

Recuerda

1. Una ***función polinomial*** es la suma de términos de la forma ax^n, donde a es un número real, n es un entero no negativo y x es una variable que admite cualquier valor real.
2. Una ***función racional*** es el cociente o razón de dos funciones polinomiales (con la restricción de que el denominador no puede ser una función constante).

Ejemplo 1

Fíjate en lo siguiente…

1a. Una condición necesaria (aunque no suficiente) para que una función sea continua es que su dominio sea el conjunto de los números reales, o bien, un conjunto equivalente a éste (es decir, con igual número de elementos).

1c. El valor $x = -2$ no pertenece al dominio de la función porque produce la expresión sin sentido $\dfrac{0}{0}$.

f no está definida en a
significa: *a no pertenece al dominio de f.*

Por tanto, la función f no está definida en -2.

Ejemplo 1

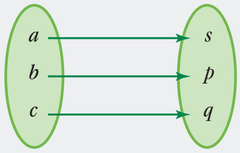
Observaciones importantes

Aunque algebraicamente es cierto que $x - 2 = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$, consideradas como ecuaciones de funciones, estas expresiones son diferentes porque sus dominios son distintos. Las gráficas coinciden en todo, excepto en que la de f está interrumpida en el punto correspondiente al valor -2, ya que la función f no está definida en ese punto.

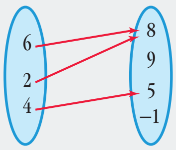
Ejercicios adicionales

1. Clasifica cada función como uno-uno, sobre o biunívoca.

   a)



   b)



2. Asocia correctamente ambas columnas.

1) $y=-5x^3+2x^2-10x-6$	a) Función exponencial.
2) $y=\log_2 x$	b) Función logarítmica.
3) $y=\dfrac{x+3}{(x-1)^3}$	c) Función racional.
4) $y=-4^x$	d) Función polinomial.
5) $y=\dfrac{1}{x}$	

3. Clasifica cada afirmación como falsa o verdadera.

   a) La función $y=\sqrt{x^2+x-1}$ no es racional ni polinomial, pero sí es algebraica.

   b) La función racional $y=\dfrac{3x+1}{x^2+5}$ es continua en los reales.

   c) La función racional $y=\dfrac{1}{x^2-4}$ es discontinua sólo en $x=2$.

Soluciones a los ejercicios adicionales

1a. Biunívoca. 1b No es uno-uno ni sobre, por tanto, es no biunívoca.

2. 1–d, 2–b, 3–c, 4–a, 5–c.

3a. Verdadera.

3b. Verdadera.

3c. Falsa. Es discontinua en $x=2$, y $x=-2$.

b) La relación N: P → F, que a cada persona *p* le asocia su fecha de nacimiento *f*, es una función porque ninguna persona pudo haber nacido en dos fechas distintas. Esta función es sobre porque cualquier fecha del calendario está asociada con alguna persona. No es uno-uno porque muchas personas poseen la misma fecha de nacimiento. No es biunívoca debido a que no es ambas: uno-uno y sobre.

c) La relación T: P → R, que a cada persona *p* de una población le asocia un registro *r* como causante fiscal, es una función porque una misma persona no puede tener más de un registro federal de causante. Esta función es uno-uno porque a registros diferentes corresponden personas distintas. No es sobre porque todos los registros del país que no sean de esa población quedan sin ser asociados con personas de dicha población.

Autoevaluación 1B

Ejercicios **1** a **5**. Identifica cada función como algebraica o trascendente.

1. $y=x^2$

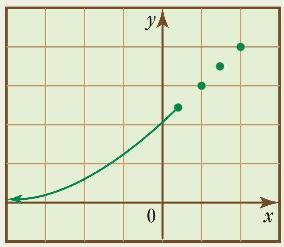
2. $y=2^x$

3. $y=-\cos x$

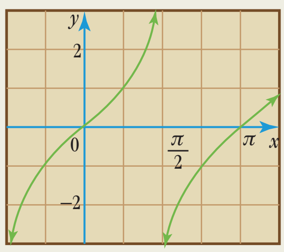
4. $y=\dfrac{3}{2}x$

5. $f(x)=\dfrac{8x^3-2}{2}$

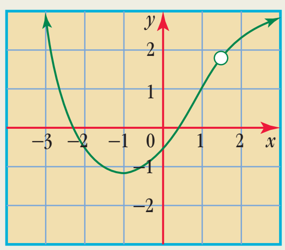
6. Asocia cada gráfica discontinua con la descripción correcta.



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

a) Existe un salto en la gráfica.

b) Existe una interrupción o agujero.

c) Existen puntos aislados.

7. Clasifica cada afirmación como falsa o verdadera:

a) Una función es sobre si el codominio coincide con el rango.

b) En una función uno-uno dos elementos distintos del dominio pueden tener la misma imagen.

c) En una función biunívoca el rango puede no ser igual al codominio.

8. Examina el dominio, la gráfica y la ecuación de cada función para determinar si es continua.

a) $y = \dfrac{4x}{x-3}$

b) $y = \sqrt{x^2+1}$

c) $y = 2x^2 - x + 1$

Ejercicios **9** a **11.** En cada función examina si es *uno-uno*, *sobre* o *biunívoca*.

9. f: N → N, $y = x^2$.

10. h: A → P, A = {autos en circulación}, P = {placas de tránsito}. h asocia a cada auto circulante con las placas de tránsito que tiene asignadas.

11. g: P → C, P = {profesionales de una localidad}, C = {población de la localidad}, g asocia a cada profesional con su nombre en el listado de ciudadanos de la localidad.

Sugerencias para la autoevaluación 1B

1. a 5.

a) Revisa los modelos proporcionados al inicio de este segmento.

b) Identifica cada ecuación como polinominal, racional, no polinominal o no racional para el caso de las funciones algebraicas.

c) Para las funciones trascendentes ubica si la función dada es exponencial, logarítmica o trigonométrica.

6. Un "*salto*" significa que la gráfica consta de dos o más ramas separadas.

Un "*agujero*" es un punto que está excluido del trazo de la gráfica.

"*Puntos aislados*" son puntos separados.

Ampliando el conocimiento

a) En algunas funciones discontinuas sus gráficas presentan tramos continuos.

b) Pueden usarse estos tramos para definir funciones continuas, limitando el dominio a alguno de dichos intervalos.

8b. ¿Para cuáles valores de x ocurre que $x - 3 = 0$? Excluye estos valores del dominio de la función.

8c. ¿Para cuáles valores de x el radicando $x^2 + 1$ es un número negativo? En caso de existir, excluye estos valores del dominio de la función.

9. Auxíliate con la gráfica de la función para examinar cada posibilidad.

Contesta cada pregunta verificando mediante casos particulares.

Uno-uno: ¿un mismo natural puede tener dos cuadrados distintos?

Sobre: ¿cualquier número natural es cuadrado de otro natural?

Biunívoca: ¿es uno-uno y sobre esta función?

10. y 11. En ciertos casos podrían no ser suprayectivas estas funciones. Argumenta al respecto.

BLOQUE 1

C

Conocimientos

Operaciones entre funciones

Suma y resta

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Multiplicación y división

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, siendo $g(x)\neq 0$

Composición

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

(Valúas f en $g(x)$)

Ejemplos

Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x$, entonces:

$(f+g)(x)=x^2+2x$

$(f-g)(x)=x^2-2x$

$(f\cdot g)(x)=(x^2)(2x)=2x^3$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{2x}=\frac{1}{2x}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=(2x)^2=4x^2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=(2x^2)=2x^2$

Consulta

En libros de álgebra intermedia:

- *Operaciones con funciones*

Situación didáctica Ventas en una nevería

Trabajas en una nevería que vende, en t horas, un promedio de x(t) = 10 t helados.

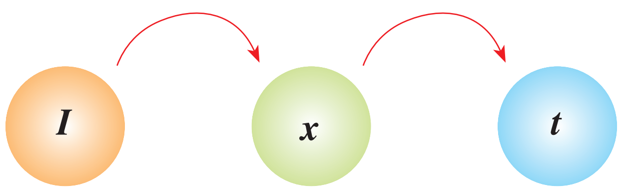
Los ingresos semanales por las ventas de x helados pueden calcularse con la función $I(x)=20\,x+950$ (en pesos).

- ¿Qué significado tiene la composición de funciones $I(x(t))$ para el negocio?
- Halla esta función y determina su valor para $t=12$.

Análisis de la situación

1. Observa que la función $x(t)$ indica cantidad de **helados vendidos**, en un cierto número de horas, en tanto que $I(x)$ expresa un **ingreso de dinero**.

2. No obstante, existe una conexión entre ambas expresiones: los ingresos $I(x)$ dependen del número x de helados vendidos y éstos, a su vez, dependen del número de horas t (que se expresa como $x(t)$). ¿En términos de qué variable podría también expresarse el ingreso?



Secuencia didáctica

1. Elabora una tabla para obtener la cantidad de helados vendidos en cierto número de horas. Para ello, valúa $x(t) = 10\,t$ para diversos valores de t.

Horas t	1	1.5	3	6
Helados x	10			

2. Obtén ahora el ingreso por las ventas de estos helados, calculando $I(x) = 20\,x + 950$ en cada uno de estos valores.

Helados x	10	30		
Ingresos I	1 150			

3. La composición $I(x(t))$ se obtiene sustituyendo cada aparición de la variable x en la expresión $20\,x + 950$ por el valor de $x(t)$, es decir, reemplazando x por el valor $10\,t$. De esta forma se obtiene:

$$I(x(t)) = I(10\,t) = 20(\underline{\qquad\qquad}) + 950 = \underline{\qquad\qquad} + \underline{\;950\;}$$

4. Esta nueva expresión para el ingreso I depende únicamente de la variable ______ (x, t), por lo que puede representarse simplemente como ________________ . Esto indica, para el negocio, que el ingreso puede calcularse conociendo sólo el ________________ (tiempo, volumen) de las ventas.

5. Por esta razón, sustituyendo en esta última expresión el valor $t = 12$, se obtiene el ingreso al cabo de 12 horas de ventas:

$$I(12) = \underline{\qquad\qquad + \;950\;} = \$\ \underline{\qquad\qquad}$$

Proyecto de trabajo

Ingresos laborales La empresa donde trabajas te paga mensualmente x pesos más un bono de 7% sobre las ventas que logres mayores a $10 000.

Si $f(x) = 0.07\,x$ expresa 7% para cualquier cantidad x, y si la función $g(x) = x - 10\,000$ indica el excedente de tus ventas x sobre $10 000, halla e interpreta $f(g(x))$.

Rúbrica de evaluación

Haz un reporte de esta actividad en tu cuaderno de matemáticas, en el cual:

1. Consignes todas los cálculos y operaciones realizadas durante el desarrollo de la secuencia didáctica.
2. Agregues una columna a cada tabla para calcular con ayuda de ambas el ingreso para $t = 12$ horas.
3. Escribas una conclusión sobre los beneficios o desventajas de trabajar con las funciones por separado (como en las tablas) o bien fusionarlas mediante la composición de funciones.
4. Expliques la relación de la composición de funciones con el cambio de variables en una función.